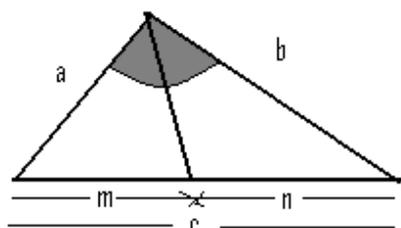




## Conceptos previos

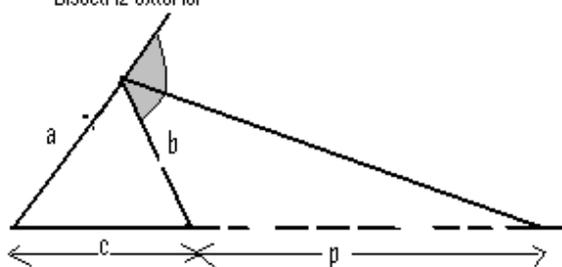
Se verifican las siguientes relaciones para cada caso, tal como se indica. Ud puede comprobar las relaciones establecidas a modelo de ejercicio

Bisectriz interior :



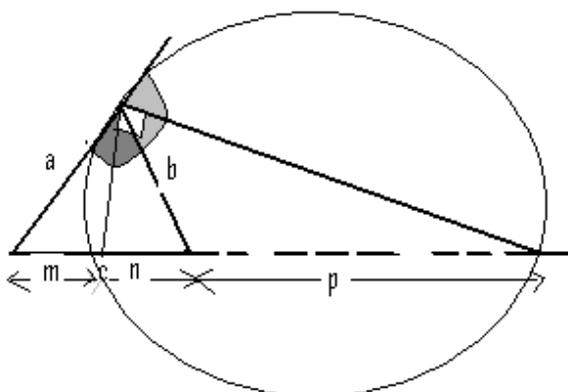
$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$$

Bisectriz exterior



$$\frac{a}{c+p} = \frac{b}{p}$$

Circulo de apolonio. †



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \quad \frac{a}{b} = \frac{c+p}{p}$$

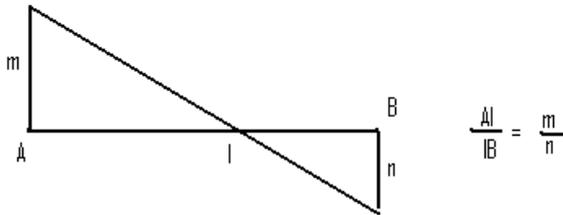
$$\frac{m}{n} = \frac{c+p}{p}$$

Una de las aplicaciones de este tema es el círculo de Apolonio. Círculo que se obtiene por la división de uno de los lados interior y exteriormente por las bisectrices interior y exterior. El diámetro del círculo en cuestión es el trazo cuyos extremos son estos puntos de división.

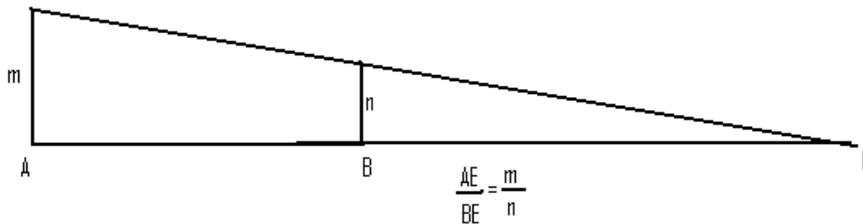
Además se establecen otro tipo de división de trazos que son muy útiles y que tienen múltiples aplicaciones

Aquí se muestra el procedimiento gráfico de esta división, Ud puede demostrar la igualdad que se establece por simple semejanza de triángulos.

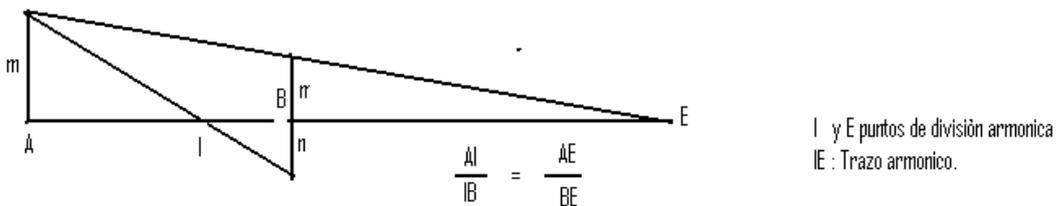
División interior en la razón m:n



División exterior en la razón m:n

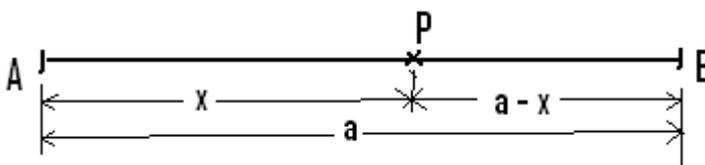


División armónica en la razón m : n



**La división armónica** consiste entonces en dividir interior y exteriormente un trazo en la misma razón .El trazo IE se suele denominar trazo armónico

**División Áurea de un trazo:** Consideremos el trazo:



Si el punto P divide al trazo AB, de modo que:  $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$

Se dice que P divide de modo áureo al trazo AB. Es decir el mayor de los trazos es media proporcional entre el trazo y el trazo menor.

De acuerdo a las medidas dadas se puede establecer que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

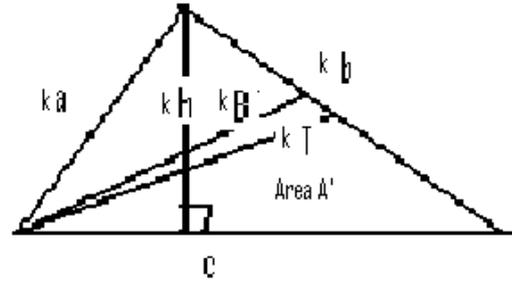
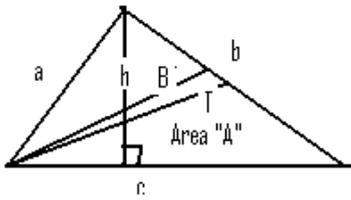
$$x^2 = a^2 - ax$$

$x^2 + ax - a^2 = 0$  , si se aplica la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$X= 0,618$$

Se puede decir que el trazo áureo corresponde al 62% del total del trazo.

Aplicaciones:



Para dos triángulos semejantes, se verifica:

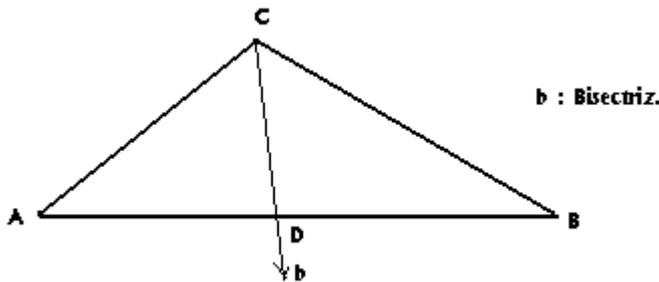
\*Los lados son proporcionales, la razón de semejanza es  $k$

\*La medida de los elementos homólogos están en la misma razón de semejanza  $k$

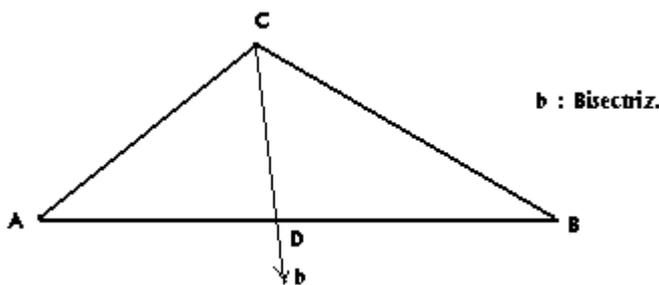
\*El área del mayor de ellos  $A' = k^2 A$

### EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

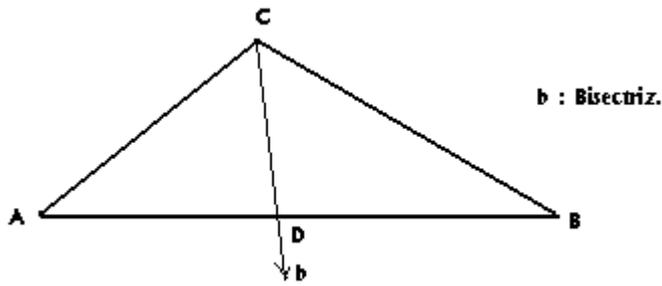
1.-EN LA FIGURA:  $AB = 20$  ;  $AC = 16$  ;  $CB = 18$



2.-EN LA FIGURA:  $AC = 12$  ;  $CB = 18$  ;  $AB = 18$

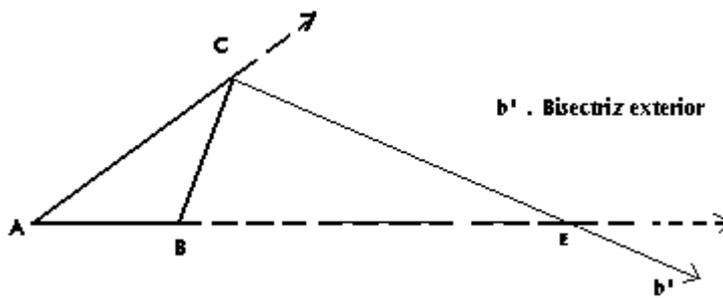


3.-EN LA FIGURA:  $AC = 15$  ;  $CB = 17$  ;  $AB = 21$

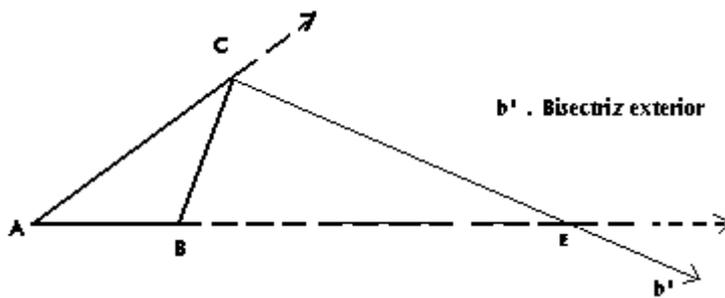


4.-En la figura:

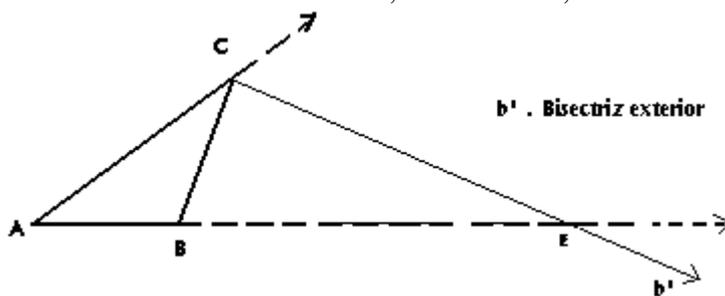
$$AB = 6 \quad ; \quad BC = 9 \quad \quad AC = 12$$



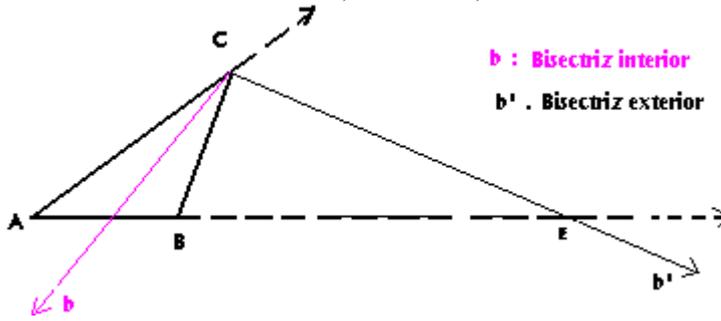
5.-En la figura:  $AB = 4$  ,  $BC = 6$  ,  $AC = 8$ . CALCULE: BE, AE



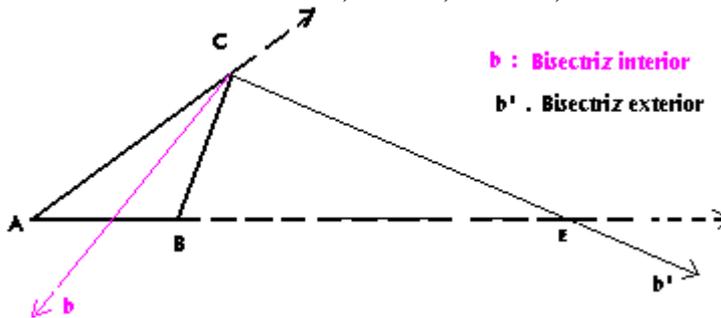
6.-EN LA FIGURA:  $AB = 10$  ,  $BC = 12$  ,  $AC = 14$ . CALCULE: AE, BE



7.-EN LA FIGURA:  $AB = 8$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 12$ . CALCULE:  $AB$ ,  $BE$ ,  $AE$ ,  $AI$ ,  $IB$ ,  $IE$

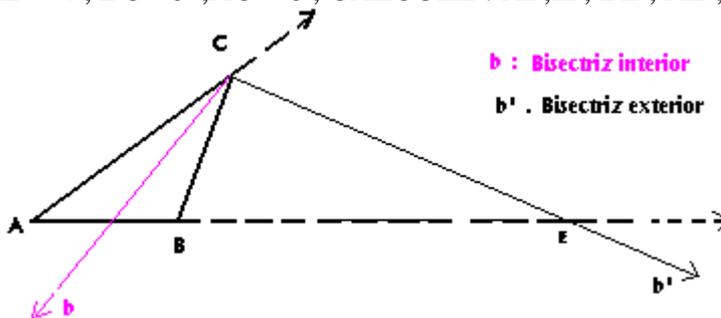


8.-EN LA FIGURA:  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 8$ , CALCULE:  $AI$ ,  $IB$ ,  $BE$ ,  $AE$ ,  $IE$

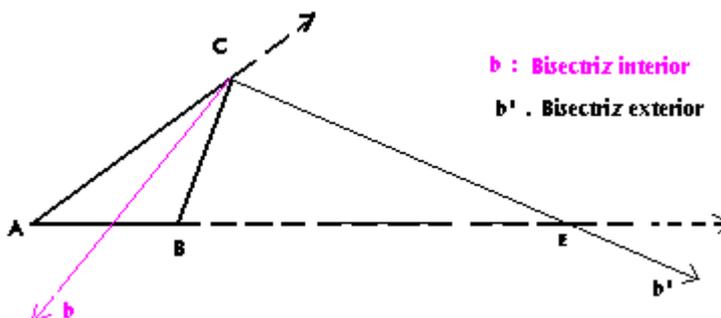


9.-Determine el diámetro del círculo de Apolonio construido sobre el lado c en el triángulo que se indica.

$AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 8$ , CALCULE :  $AI$ ,  $IB$ ,  $BE$ ,  $AE$ ,  $IE$



10.- EN LA FIGURA :  $AB = 8$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 12$ . CALCULE:  $AB$ ,  $BE$ ,  $AE$ ,  $AI$ ,  $IB$ ,  $IE$ , determine el área y el perímetro del círculo de Apolonio construido sobre el lado c



DIVISION DE TRAZOS.

1.- Encuentre el mayor de los tramos de un segmento  $AB = 48$  cm. Si  $AP = PB = 5:7$   
(28 cm.)

- 2.- Un punto P divide interiormente a  $AB=18$  cm. en la razón 2:1.Determine cada trazo.  
(12 y 6 cm.)
- 3.- Un punto P divide interiormente a AB en la razón 2:7, Si  $AP=30$ cm.Determine PB y AB.  
(105 y 135 cm.)
- 4.- Encuentre la medida de un trazo AB.Si un punto P interior lo divide en la razón 3 es a 4 y el menor de los trazos mide 27cm.  
(63cm)
- 5.- Encontrar la medida de un trazo AB , si un punto P interior lo divide en la razón 2:7 y el menor de los trazos mide 30cm.  
(135cm)
- 6.- Encontrar la medida de AB , si el punto P interior lo divide en la razón 9:4 , y el menor de los trazos mide 18cm.  
(58,5)
- 7.- Se tiene un trazo  $AB=36$ cm.Un punto P interior a AB es tal que  $AP: PB=2:1$ , y un punto Q interior a AB es tal que  $PQ=3:4$  .Calcular PQ.  
(12cm)
- 8.-Se tiene un trazo  $AB=18$ cm, y un punto P exterior a AB,  $AB: BP=2:5$ .Calcular la prolongación y el trazo prolongado.  
(45 y 63cm)
- 9.-Un trazo prolongado es el trazo como 15 es a 12.Calcular la prolongación si el trazo mide 45cm.  
(11,25cm)
- 10.- Un trazo y su prolongación están en la razón 5:7. ¿En que razón están el trazo prolongado y su prolongación?  
(12:7)
- 11.- Un trazo y su prolongación están en la razón de 5:8; si la prolongación mide 60cm. ¿cuanto mide el trazo?  
(37,5cm)
- 12.- Un trazo prolongado y el trazo están en la razón 5:3 .¿En que razón están el trazo y su prolongación?  
(2:3)
- 13.- Un trazo  $AB=18$ cm.Un punto P interior y otro punto Q exterior son tales que: $AP:PB=3:5$  y  $AB:BQ=8:7$ .Calcular PQ.
- 14.- Un punto Q divide exteriormente un trazo AB en la razón  $AB: BQ=2:3$ .Si  $AB=50$ cm.Calcular el menor trazo que determina un punto P que divide al trazo AB en la misma razón. Calcular además PQ.

(20 y 105cm)

15.- Dado  $AB = 26\text{cm}$ . Determine MN tal que M y N dividan respectivamente a AB interior y exteriormente en la razón 5:4 . Calcule AM, MB, BN, MN.

$$\left(14\frac{4}{9}, 11\frac{5}{9}, 104, 105\frac{5}{9}\right)$$

16.- Un punto D situado en la prolongación de  $AB = 36\text{cm}$ , es tal que  $DA:DB = 7:8$ . ¿Cuanto mide DA y DB?

(252 , 288)

17.- Un punto N divide interiormente a AB, tal que  $AN:NB = 5:9$  . La distancia de N al punto medio de AB es 28cm. Calcular NA, NB, AB.

(70 , 126 , 196cm)

18.- Un punto N divide interiormente a CD tal que  $NC:ND = 5:9$  . Su distancia al punto medio de CD es 28cm. Calcular NC, ND, si  $CD = 196\text{cm}$ .

(70 , 126cm)

19.- Dividir  $AB = 30\text{cm}$  interiormente en la razón de 3:2

(18 , 12cm)

20.- Un punto P divide interiormente al trazo AB en la razón 7:2. Si el menor de los trazos equivale a 24cm. ¿Cuanto mide el trazo?

(108cm)

21.- Un punto P divide interiormente a AB en la razón 9:2 . Calcular la superficie del cuadrado cuyo lado equivale al menor de los trazos determinados por P, si el mayor mide 54cm.

(144  $\text{cm}^2$ )

22.- Un punto P divide un trazo  $AB = 72\text{cm}$ , en la razón 7:5. Calcular cada una de las superficies de las circunferencias construidas teniendo como diámetro estos trazos.

(441  $\pi$ , 225 $\pi$ )

23.- En el problema anterior calcule el perímetro de las circunferencias mencionadas...

(42  $\pi$ , 30 $\pi$ )

24.- Un punto P divide un trazo AB en la razón 5:6 . Si el mayor de los trazos mide 60cm. Calcular la altura del triángulo equilátero construido con el otro trazo.

(25  $\sqrt{3}$  cm.)

25.- En el problema anterior calcule el área del triángulo equilátero construido con el mayor de los trazos.

(900  $\sqrt{3}$   $\text{cm}^2$ )

26.- Un trazo AB se divide interiormente por un punto P en la razón 7:2 . Si el menor de los trazos mide 40cm. Calcular el perímetro del rectángulo construido con estos trazos.

(5600 y 360)

27.- Un trazo AB se divide interiormente por un punto P en la razón 3:4 .Si el menor de los trazos mide 21cm.Calcular la superficie y el perímetro de la circunferencia construida sobre el diámetro AB.

(66.25, 49)

28.- Un trazo AB se divide interiormente en la razón 7:2 .En este mismo trazo se construyen dos triángulos equiláteros de modo que las alturas sean estos trazos .Calcular el perímetro de la figura que se forma, si AB=50cm.

$(100\sqrt{3}, \frac{2300}{27}\sqrt{3})$

28.- Calcular la distancia entre los puntos de división armónica de un trazo AB=36cm, dividido en la razón 4:2.

(30cm)

29.- Dividir AB=23 cm. en tres partes proporcionales a los números 2 ; 3 ; 5.

(4,6 6,9 11,5)

30.- Dado AB=80cm .Dividirlo analíticamente en cuatro partes proporcionales a los números 3 , 4 , 2 y 7.

(15 , 20 , 10 y 35cm)

31.- Un trazo AB estas dividido armónicamente por los punto I y E en la razón 7:2.Si EA=39.2cm .Calcule AB, IA, IE.

$(28, 21\frac{7}{9}, 17\frac{19}{45} \text{ cm.})$

32.- Un trazo AB=28cm se divide interior y exteriormente por los puntos I y E en la razón armónica 4:3 .Calcular el área y el perímetro de la circunferencia cuyo radio equivale a la mitad del trazo armónico.

$(2304\pi\text{cm}^2, 96\pi \text{ cm})$

33.-Hallar el segmento áureo den trazo de 200cm.

34.- Un ventana rectangular tiene dimensiones áureas entre sus lados. Si el perímetro de esta es de 3,20mts. ¿Cuánto mide el largo y el ancho?

35.- Con una moldura de 2 mts de largo se quiere construir un marco para un cuadro de modo que el largo y el ancho estén en razona áurea ¿Qué medida deben tener estas dimensiones?

36.- El lado de un decágono regular es la razona áurea del radio de la circunferencia circunscrita al polígono. Si se inscribe un decágono en una circunferencia de 20cm de radio .¿Qué medida tendrá el lado?